Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya

Titular

Universitat de Barcelona
Universitat Autònoma de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya
Universitat Pompeu Fabra
Universitat de Lleida
Universitat de Girona
Universitat Rovira i Virgili
Universitat Ramon Llull
Universitat de Vic
Universitat Internacional de Catalunya
Universitat Abat Oliba CEU

Proves d’accés a la universitat per a més grans de 25 anys
ABRIL 2005

Criteris d’avaluació

Opció 1. Cientificotècnica i Ciències de la Salut

Matemàtiques

Puntuació total: 10 punts

PROVA TITULAR DE MATEMÀTIQUES

CRITERIS GENERALS DE CORRECCIÓ

En aquesta prova es valoraran els aspectes següents:

- el coneixement de conceptes matemàtics.
- la utilització d'eines de càlcul bàsiques.
- el raonament logicomatemàtic.
- la capacitat per resoldre problemes.

Així, en cada exercici es puntuaran bàsicament:

- el plantejament.
- els càlculs i la tècnica utilitzada.
- el resultat final obtingut i la seva interpretació quan convingui.

PROVA TITULAR DE MATEMÀTIQUES

PAUTES DE CORRECCIÓ I SOLUCIONARI

Avalueu cada exercici en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada exercici podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma.

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar ni donar la *millor solució* a cada exercici. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar aquests criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars.

En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre bon criteri i sentit comú.

PROBLEMES

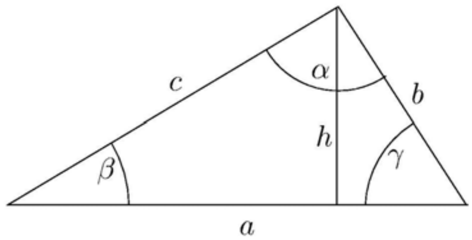
1. Dos costats d'un triangle mesuren 252 cm i 144 cm, i formen un angle de 60 graus.

   a) Quin és el seu perímetre?

   b) Quina és la seva àrea?

   c) Quants graus mesura l'angle més gran?

Diem $a = 252,\ b = 144$ i c als costats del triangle, i α , β i $\gamma = 60^o$ als angles oposats corresponents, com s'indica en la figura següent:



a) Utilitzant que el cosinus de 60 graus és 0.5 i el teorema del cosinus, s'obté que la longitud del costat c mesurada en cm és:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = 47952, \quad c = \sqrt{47952} \approx 218.979.$$

Així doncs, el perímetre del triangle és $P = a + b + c \approx 614.979\,cm.$

b) L'altura h mesurada en *cm és* $h = b\sin(\gamma) = 144\sqrt{3}/2 = 72\sqrt{3} \approx 124.708$.

Per tant, l'àrea del triangle mesurada en cm^2 és $A = \dfrac{a\,h}{2} \approx 15713.165$.

c) Utilitzant les dades, els resultats anteriors i el teorema del cosinus s'obté que l'angle α és $\alpha = \arccos\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \approx \arccos(0.0822) \approx 85.285^o$.

Utilitzant aquest mateix procediment, o bé que els angles d'un triangle sumen 180^o, tenim que $\beta \approx 34.715^o$.

Per tant, l'angle més gran és l'α , que mesura aproximadament 85.285^o .

Compteu fins a 4 punts per l'apartat a), fins a 3 punts pel b) i fins a 3 punts pel c). Valoreu que el dibuix de la situació sigui el correcte i el coneixement que es demostri de les tècniques de resolució de triangles. Per errors de càlcul no tragueu més d'un punt per apartat.

---

2. Considereu la funció $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

a) En quins intervals la funció f és positiva?

b) Per a quin valor d'a la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt $(a, f(a))$ passa per l'origen de coordenades?

---

a) Per trobar els punts on la funció s'anul·la hem de resoldre l'equació $f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$. Provant entre els divisors del terme independent, es comprova que 1 és una solució de l'equació. Dividint el polinomi inicial per $x-1$ (directament, o bé per Ruffini) s'obté la descomposició $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$. Atès que les arrels del polinomi $x^2 + x - 6$ són 2 i -3, tenim la descomposició següent:
$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3)$.
Si $x \in (-\infty, -3)$, llavors els tres termes $x-1$, $x-2$ i $x+3$ són negatius i per tant el seu producte és negatiu. Si $x \in (-3, 1)$ els dos primers són negatius i el tercer positiu, i per tant el producte és positiu. Anàlogament es comprova que el producte és negatiu si $x \in (1, 2)$ i positiu si $x \in (2, +\infty)$.
Per tant, la funció és positiva en els intervals $(-3, 1)$ i $(2, +\infty)$.

b) Recordem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$ és $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Si volem que aquesta recta passi pel punt $(0,0)$ s'ha de complir $-f(a) = f'(a)(-a)$, que en el nostre cas equival a $a^3 - 7a + 6 = (3a^2 - 7)a$.
Agrupant termes tenim $2a^3 = 6$ i, per tant, $a = \sqrt[3]{3} \approx 1.442$.

Compteu fins a 5 punts per l'apartat a): 2 pel càlcul de les arrels, i 3 per la resta. Compteu fins a 5 punts per l'apartat b) : 3 punts pel plantejament i 2 punts pels càlculs.

---

3. Considereu la funció $f(x) = e^{-x} - 1$.

a) Calculeu la primitiva F de la funció f que compleix $F(0) = 0$.

b) Calculeu l'àrea de la regió plana limitada per la gràfica de la funció f i l'eix d'abscisses entre $x = -2$ i $x = 1$.

---

a) L'expressió general d'una primitiva de f és $\int (e^{-x} - 1)dx = -e^{-x} - x + C$.

Si volem que s'anul·li en el punt 0 cal que $-e^0 + C = -1 + C = 0$ i, per tant, $C = 1$.
Així doncs la funció buscada és $F(x) = -e^{-x} - x + 1$.

b) Per les propietats de la funció exponencial, sabem que la funció e^{-x} és una funció estrictament decreixent definida en tota la recta real, i que $f(x) = e^{-x} - 1 = 0$ només quan $x = 0$.
Així doncs la funció $f(x) = e^{-x} - 1$ és positiva en l'interval $(-\infty, 0)$ i negativa en $(0, +\infty)$. Per tant, l'àrea demanada és:

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \left[-e^{-x} - x\right]_{-2}^{0} - \left[-e^{-x} - x\right]_{0}^{1} = e^2 + e^{-1} - 3 \approx 4.757\,.$$

Compteu fins a 5 punts per l'apartat a): 2 punts per l'ús d'una tècnica adequada per resoldre el problema; 2 punts pel càlcul de la integral indefinida; 1 punt pel càlcul de la constant. Compteu fins a 5 punts per l'apartat b): 3 punts per l'expressió de l'àrea com a suma d'integrals; 2 punts pels càlculs finals.

---

4. Considereu la recta r que passa pels punts $p=(1,2)$ i $q=(3,3)$, i la recta r' d'equació $ax+4y=1$.

   a) Per a quin valor del paràmetre real a les rectes r i r' són perpendiculars?

   b) Per a quin valor del paràmetre real a les rectes r i r' són paral·leles?

   c) En aquest darrer cas, quina és la distància entre les dues rectes?

---

a) El vector $\overrightarrow{pq}=(2,1)$ és un vector director de la recta r i el vector $\vec{v}=(4,-a)$ és un vector director de la recta r'. Si es vol que les rectes siguin perpendiculars cal que el producte escalar dels dos sigui 0, és a dir $\overrightarrow{pq}\cdot\vec{v}=(2,1)\cdot(4,-a)=8-a=0$. Per tant, cal que $a=8$.

b) Si és vol que les dues rectes siguin paral·leles cal que es compleixi $\vec{v}=\lambda\,\overrightarrow{pq}$, per a un cert nombre real λ. Per tant, s'ha de complir que $(4,-a)=\lambda(2,1)$, d'on s'obté $\lambda=2$ i $a=-2$. Les rectes no coincideixen, ja que el punt $p=(1,2)$ no compleix $-2x+4y=1$.

c) La distància entre les dues rectes coincideix amb la distància del punt $p=(1,2)$ a la recta r', que és:

$$d(p,r')=\frac{|-2+8-1|}{\sqrt{4+16}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1.118.$$

Compteu fins a 4 punts per l'apartat a), fins a 4 punts per l'apartat b) i fins a 2 punts per l'apartat c).

---

5. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + a\,y + \quad z = 2 \\ x + \; y - \quad z = 1 \\ \qquad y + a\,z = 1 \end{cases}$$

a) Per a quins valors del paràmetre real a el sistema té solució?

b) Resoleu el sistema quan $a = 1$.

Les matrius dels coeficients, C , i ampliada, A , associades al sistema són:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

a) El sistema té solució (sistema compatible) quan $rang(A) = rang(C)$. Però el determinant de C val $|C| = -a^2 + a + 2$, que només s'anul·la per a $a = -1$ i $a = 2$. Per tant, si $a \neq -1, 2$ llavors $rang(A) = rang(C) = 3$, i el sistema és compatible.

Quan $a = -1$, $rang(C) = 2$, ja que C té un menor d'ordre 2 no nul, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, i

$rang(A) = 3$, ja que A té un menor d'ordre 3 no nul $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Així doncs, per a $a = -1$ el sistema és incompatible.

Quan $a = 2$, la segona columna i la quarta columna de la matriu ampliada coincideixen, i per tant es compleix $rang(C) = rang(A)$.

En conseqüència, el sistema té solució només quan $a \neq -1$.

b) Per a $a = 1$ el sistema és: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ \quad y + z = 1 \end{cases}$. Restant les dues primeres equacions obtenim $2z = 1$ i, per tant, $z = 1/2$. Substituint aquest valor en la tercera equació tenim $y = 1/2$. Finalment, substituint aquests valors en la primera equació s'obté $x = 1$.

Així doncs, la solució del sistema és $x = 1$, $y = 1/2$ i $z = 1/2$.

Compteu fins a 7 punts per l'apartat a), valorant la correcció i claredat del mètode utilitzat en la discussió de la compatibilitat del sistema. Compteu fins a 3 punts per l'apartat b). No tragueu més de 2 punts per errors numèrics.
