Sèrie 3

EXERCICIS. Opció A

A1.- Trobeu una primitiva de la funció $f(x) = e^{4x} + 2x$.

Solució: Pot ser $F(x) = e^{4x}/4 + x^2$ ja que $F'(x) = e^{4x} + 2x$.

Puntuació: *0.5 per la integració correcta de cada sumand. Total 1 punt.*

A2.- Els angles iguals d'un triangle isòsceles són de 45° i el costat diferent té una longitud de 2m. Trobeu l'angle i els costats que falten.

Solució: Evidentment, l'angle que falta és de 90°. El costat donat és, per tant, la hipotenusa i els dos catets tenen una mateixa longitud *x*. Aplicant el teorema de Pitàgores, $x^2 + x^2 = 4, \quad x^2 = 2, \quad x = \sqrt{2}m$.

Puntuació: *1 punt. Es deixa a criteri del corrector la penalització dels errors.*

A3.- Expliqueu raonadament si és possible que el pendent de la recta tangent a la corba d'equació $y = x^3$ sigui negativa en algun punt.

Solució: La derivada de la funció $f(x) = x^3$ és $f'(x) = 3x^2$ que només pot ser positiva o zero però mai negativa. També es pot argumentar dient que es tracta d'una funció que mai és decreixent.

Puntuació: *1 punt.*

A4.- Trobeu els valors de p que fan que el sistema que segueix tingui infinites solucions.

$$\left.\begin{array}{l} px - y = 6 \\ x - py = 6 \end{array}\right\}.$$

Solució: El determinant de la matriu de coeficients és igual a $p^2 - 1$ que s'anul·la quan *p* val 1 o -1.

Quan $p = 1$, el sistema és $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ x - y = 6 \end{array}\right\}$ i queda clar que està format per dues equacions iguals. Això significa que, en aquest cas, té infinites solucions.

Per contra, quan $p = -1$, el sistema és $\left.\begin{array}{l} -x - y = 6 \\ x + y = 6 \end{array}\right\}$ i al sumar ambdues equacions s'obté $0 = 12$, és a dir, no té solució.

Puntuació: *1 punt. Encara que només es discuteixi el cas* $p=1$ *es donarà la puntuació màxima.*

A5.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular a la d'equació $2x+3y-4=0$ **que passa pel punt (1,-1).**

Solució: $3(x-1)-2(y+1)=0, \quad 3x-2y-5=0.$

Puntuació: *0.5 per aplicar correctament algun criteri de perpendicularitat i 0.5 per l'equació.*

<u>EXERCICIS. Opció B</u>

B1.- Calculeu el valor de la suma de tots els múltiples de 3 entre 1 i 1000.

Solució: El primer, evidentment, és el 3 i l'últim el 999. Donat que en total cal sumar 333 números es pot fer

$$3+6+\mathsf{L}\ +999=\frac{999+3}{2}\cdot 333=166833.$$

Puntuació: *1punt. No cal indicar el tipus de progressió si s'usa la fórmula correcta de la suma. Un cop aplicada la fórmula correctament, els errors de càlcul penalitzen 0.5 a criteri del corrector.*

B2.- Simplifiqueu l'expressió $\dfrac{(x^2+2x-3)(x+3)}{x^3+3x^2-x-3}$**.**

Solució: Al factoritzar el numerador i el denominador de l'expressió s'obté

$$\frac{(x^2+2x-3)(x+3)}{x^3+3x^2-x-3}=\frac{(x-1)(x+3)^2}{(x-1)(x+3)(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}.$$

Puntuació: *1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització dels errors.*

B3.- Se sap que $g(x)=1/x$ **és la funció derivada de** $f(x)=\ln x$**. Malgrat tot, és ben conegut que** $f'(-3)$ **no existeix. Raoneu per què.**

Solució: Malgrat que la regla de derivació ens proporciona una funció avaluable per tot x diferent de zero, només té sentit parlar de la derivada allí on existeix la funció i la funció logaritme no existeix per valors negatius de la variable independent.

Puntuació: *1 punt.*

B4.- Escriviu l'equació de la recta paral·lela a $\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ que passa pel punt (1,-1,1).

Solució: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$.

Puntuació: *0.5 per aplicar correctament algun criteri de paral·lelisme i 0.5 per l'equació.*

B5.- Calculeu el valor de *k* que fa que el determinant de $M=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sigui zero.

Solució: $3k-2=0, \quad k=2/3$.

Puntuació: *1 punt.*

<u>Problema 1.-</u> Considereu la funció $f(x)=x^3+ax^2-bx$.

a) Trobeu els valors de *a* i de *b* que fan que *f* tingui un extrem relatiu en el punt (1,-4). Digueu de quin tipus d'extrem es tracta.

b) En el cas en què $a=1$ i $b=0$, calculeu l'àrea tancada entre la funció *f(x)* i la recta $y=2x$ que es troba dins el quadrant $x\geq 0,\ y\geq 0$.

Solució:

a) Primerament, val la pena calcular la derivada de la funció $f'(x)=3x^2+2ax-b$.
La funció té un extrem en el punt $(1,-4)$ si es compleix a la vegada $f(1)=-4$ i $f'(1)=0$. Això es tradueix en el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 1+a-b=-4 \\ 3+2a-b=0 \end{array}\right\}.$$

Si a la segona equació es resta la primera s'obté $2+a=4, \quad a=2, \quad b=7$.
Pels valors dels paràmetres obtinguts, la derivada segona és
$f''(x)=6x+4, \quad f''(1)=10>0,$
i això permet afirmar que el punt $(1,-4)$ correspon a un mínim relatiu.

b) Ara cal trobar els punts de tall i la posició relativa d'ambdues funcions dins els quadrant positiu

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3+x^2 \\ y=2x \end{array}\right\}, \quad x^3+x^2-2x=0, \quad x(x^2+x-2)=0.$$

Les solucions són $x=0,\ x=1$ i $x=-2$. L'última solució s'ha de rebutjar perquè és negativa.
Es comprova fàcilment que, dins l'interval (0,1), la recta queda per sobre de la funció polinòmica. Per tant, l'àrea es calcula fent

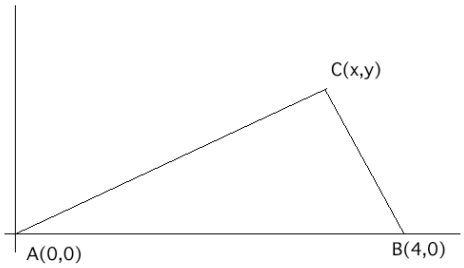
$$A=\int_0^1(2x-x^3-x^2)dx=\left[x^2-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}u^2.$$

Puntuació:
Apartat a):

0.5 pel càlcul correcte de la derivada.
0.5 per l'obtenció correcta de cada una de les equacions del sistema. Total 1punt.
0.5 per la resolució correcta.
0.5 per la classificació de l'extrem.
Apartat b):
0.5 punt per l'obtenció dels punts de tall.
0.5 pel planteig correcte de la integració.
1 punt pel càlcul correcte de la primitiva.
0.5 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.

Problema 2.- Un triangle rectangle té la hipotenusa sobre l'eix OX de manera que dos dels seus vèrtexs són els punts $A(0,0)$ i $B(4,0)$. Trobeu el tercer vèrtex sabent que l'àrea del triangle val $\sqrt{12}$ unitats de superfície.

Solució:



Es representa el tercer vèrtex per $C(x,y)$. Com que el triangle és rectangle cal que els vectors de components (x,y) i $(x-4,y)$ siguin perpendiculars i, a més a més, donat que l'àrea val $\sqrt{12}$, es té que $\frac{4y}{2}=\sqrt{12}$. Llavors, $y=\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$. Per simetria, això també es pot aplicar en el cas en què y és negativa però es deixà pel final el donar les solucions simètriques.
Aplicant la condició de perpendicularitat

$$(x,y)(x-4,y)=x^2-4x+y^2=x^2-4x+3=0, \quad x=1, \quad x=3.$$

Així, el tercer punt pot ser $\left(1,\sqrt{3}\right)$ o $\left(3,\sqrt{3}\right)$, o també algun dels simètrics respecte de l'eix horitzontal $\left(1,-\sqrt{3}\right)$ o $\left(3,-\sqrt{3}\right)$.

Puntuació:
1.5 punt per aplicar correctament la condició de perpendicularitat.
1.5 punt per aplicar correctament la condició sobre l'àrea.
1 punt per obtenir una de les solucions.
1 punt per obtenir, com a mínim, una altra de les solucions.