Sèrie 2

Opció A

A1.- Determineu l'equació de la recta paral·lela a la recta d'equació $2x+4y+3=0$ que passa pel punt (1,-1).

Solució.- El vector normal de la recta és el $(2,4)$. Llavors, l'equació demanada s'escriu $2(x-1)+4(y+1)=0 \quad \rightarrow \quad x+2y+1=0$.

Puntuació.- 0.5 pel vector normal i 0.5 per l'equació de la recta.

A2.- Calculeu raonadament els valors de p que impedeixen que el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 3x+3y=p \end{array}\right\}$ tingui solució.

Solució.- Hauria de ser bastant evident que, quan $p=3$, les dues equacions coincideixen i, llavors, el sistema és compatible i indeterminat. En canvi, si $p \neq 3$, el sistema no té solució. Tot aquest raonament també es pot fer considerant que la matriu de coeficients té rang 1 i, en conseqüència, el sistema no té solució quan el rang de la matriu ampliada val 2, cosa que porta de nou a $p \neq 3$.

Puntuació.- 0.5 per donar la condició $p \neq 3$ i 0.5 pel raonament que hi condueix. Queda clar que la resposta correcta no és $p=3$ i que, per tant, no s'ha de puntuar.

A3.- Calculeu una primitiva de la funció $f(x)=\cos 2x+1/x$.

Solució.- $F(x)=\dfrac{\sin 2x}{2}+\ln x$ ja que $F'(x)=f(x)$.

Puntuació.- 0.5 per la primitiva de cada sumand.

A4.- Determineu el residu resultant de dividir el polinomi x^3-5x^2+4x+2 entre el binomi $x+1$.

Solució.- La manera més senzilla d'arribar a la resposta és substituir x per -1 dins el polinomi. Això proporciona un residu igual a -8. Òbviament, aquest resultat també es pot obtenir fent la divisió ja sigui usant l'algorisme tradicional o el de Ruffini.

Puntuació.- 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

A5.- Calculeu i simplifiqueu $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x^2-3}{x^2-3x+2}$.

Solució.-

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-3}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)^2-(x^2-3)}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2x+4}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x-1}$$

Puntuació.- 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

Opció B

B1.- Indiqueu dos valors de x diferents que compleixin $\sin x=\cos x$.

Solució.- Servirà qualsevol valor de x que faci $\tan x=1$. Així, poden servir tots els valors de la forma $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ on k és qualsevol valor enter.

Puntuació.- Per cada valor correcte de x es puntuarà 0.25 per l'angle i 0.25 per la justificació. Si els valors de x s'escriuen en graus sexagesimals doneu per bona la solució.

B2.- Deriveu la funció $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$.

Solució.- $f'(x)=\dfrac{x^2\cos x-2x\sin x}{x^4}=\dfrac{x\ \cos x-2\sin x}{x^3}$.

Puntuació.- 1punt. Les errades es penalitzaran a criteri del corrector. De tota manera, si no s'aplica la regla de derivació de quocients (o del producte si algú ho escriu com $f(x)=x^{-2}\sin x$) es puntuarà zero. La no simplificació del resultat no penalitzarà.

B3.- Trobeu la matriu inversa de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Solució.- Una manera d'obtenir-la pot ser fent

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ |A|=1,\ A^{adj}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Puntuació.- 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

B4.- Resoleu $\log_3 x = 2$.

Solució.- De la definició de logaritme $3^2 = x \;\rightarrow\; x = 9$.

Puntuació.- 1 punt. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades que es cometin.

B5.- Determineu l'equació del pla paral·lel al d'equació $x + y - 2z = 3$ que passa pel punt $(1,1,-1)$.

Solució.- $(x-1)+(y-1)-2(z+1)=0$.

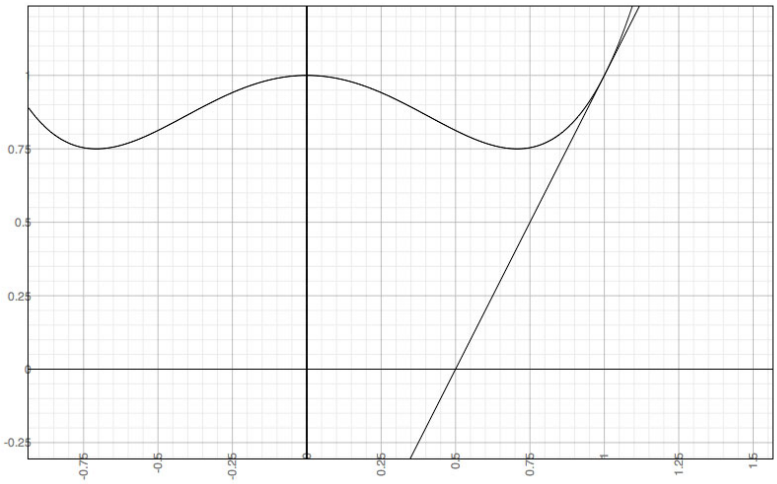
Puntuació.- 1 punt.

Problema 1.- Determineu l'equació de la recta tangent a $y = x^4 - x^2 + 1$ pel punt $(1,1)$. Calculeu el valor de l'àrea tancada entre la corba del començament, la recta tangent obtinguda i la part positiva dels eixos de coordenades.

Solució.- Primerament es troba el pendent de la recta demanada

$$y' = 4x^3 - 2x \;\rightarrow\; m = 4 - 2 = 2$$

y l'equació és $y - 1 = 2(x-1) \;\rightarrow\; y = 2x - 1$.



Tal com es veu a la figura, l'àrea demanada és la tancada entre la corba de l'enunciat i l'eix horitzontal des de 0 fins a 1/2 i entre la corba i la tangent des de 1/2 fins a 1.

$$A = \int_0^{1/2} (x^4 - x^2 + 1)dx + \int_{1/2}^{1} (x^4 - x^2 + 1 - 2x + 1)dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x\right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{1/2}^{1} = \frac{223}{480} + \frac{73}{480} = \frac{37}{60}.$$

Puntuació.-
1 punt per la derivada.
1 punt per la recta tangent
1 punt per construir un esquema coherent, gràfic o no, de les integrals que cal fer.
1 punt per cada una de les dues integracions.

Problema 2.- Estudieu la posició relativa dels plans d'equacions $\Pi_1 : x+2y+kz=-1$, $\Pi_2 : 2x+ky+6z=1$ i $\Pi_3 : x+y+kz=0$ en funció del paràmetre *k*. Trobeu quina és la seva intersecció en el cas $k=1$.

Solució.- La resposta, d'una manera o altra, passarà per la discussió del sistema format per les tres equacions en funció del paràmetre k.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+kz=-1 \\ 2x+ky+6z=1 \\ x+y+kz=0 \end{array}\right\}.$$

Calculant el determinant de la matriu de coeficients i igualant-lo a zero es té

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 6 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2+12+2k-k^2-6-4k=6-2k=0 \quad \rightarrow \quad k=3.$$

Llavors, si $k \neq 3$ el sistema és compatible i determinat i els tres plans tenen per intersecció comuna un punt. Ara cal estudiar què passa quan $k=3$. En aquest cas el sistema és

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=-1 \\ 2x+3y+6z=1 \\ x+y+3z=0 \end{array}\right\}.$$

És bastant clar que les equacions, agafades de dues en dues, són linealment independents i cada parell de plans determina una recta. Ara bé, sabent que el rang de la matriu de coeficients val dos, cal trobar el rang de la matriu ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

i el rang d'aquesta matriu val 3. Per tant, en aquest cas el sistema és incompatible i, tot i que els plans es tallen dos a dos, no tenen intersecció comuna.

En el cas $k=1$, restant dues vegades la primera a la segona i restant la primera a la tercera,

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1 \\ 2x+y+6z=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1 \\ -3y+4z=3 \\ -y=1 \end{array}\right\} \rightarrow x=1, y=-1, z=0.$$

Puntuació.-

1 punt per trobar el valor de k que discrimina.
1 punt per explicar i justificar què passa quan $k \neq 3$.
1 punt per explicar i justificar què passa quan $k=3$. En aquest cas es considera suficient justificar que el sistema és incompatible i que els plans no tenen intersecció comuna.
2 punts per la resolució del sistema quan $k=1$